Kısmi Dif. Denklem, I Büt.   23.01.2020

1) $y = x + z^2 y + z \ln x - 1$ yüzeyinin $P_0(1,2,1)$ noktasında teğet düzlem denklemini varsa bulunuz.

2) $xp + yq = z + pq$ denkleminin tam çözümünü bulunuz. Varsa zarf yüzeyini bulunuz.

3) $z = f(x-y) + g(x+y)$ ifadesini genel çözüm kabul eden kısmi dif. denklemi bulunuz.

4) $z z_x + y z_y + z = 0$ denkleminin $\alpha(t) = (t^2, 1, t^2)$ eğrisinden geçen çözümü varsa bulunuz.

5) $xp + yq + pq = z$, $zpy + p^2 = 3$ denklemlerin bağdaşabilir olup-olmadıklarını gösteriniz.

6) $(xp)^2 + \frac{1}{2} y^{-1} q = z$ denkleminin tam çözümünü bulunuz.

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız. Başarılar

Çözümler

1) $F = -y + x + z^2 y + z \ln x - 1$ $\quad N\big|_{P_0} = (F_x, F_y, F_z)\big|_{P_0}$ $\quad P_0(1,2,1)$

$x_0 = 1 \quad y_0 = 2 \quad z_0 = 1$

$F_x = 1 + \frac{z}{x}$, $F_y = -1 + z^2$ $\quad F_z = 2zy + \ln x$

$F_x\big|_{P_0} = 1 + \frac{1}{1} = 2$ $\quad F_y\big|_{P_0} = -1 + 1 = 0$ $\quad F_z\big|_{P_0} = 2.1.2 + \ln 1 = 4$ $\quad N\big|_{P_0} = (2, 0, 4)$

$\overrightarrow{P_0P} = (x-1, y-2, z-1)$, $P(x,y,z)$ temsili bir nokta düzlem üzerinde

Teğet düzlem denklemi

$$\langle N\big|_{P_0}, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 0.(y-2) + 4(z-1) = 0$$

$$2x + 4z - 2 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x + 2z - 3 = 0} \text{ olur}$$

2) $xp+yq=z+pq \Rightarrow z=xp+yq-pq$ denk clairault kısmi dif. denklemidir. $p=a$, $q=b$ alınırsa tam çözüm $z=ax+by-ab$ olur. Zarf yüzeyi varsa bulalım

$F=-z+ax+by-ab$

$\frac{\partial F}{\partial a}=x-b=0 \Rightarrow \boxed{b=x}$, $\frac{\partial F}{\partial b}=y-a=0 \Rightarrow \boxed{a=y}$ olur

Bunlar $z=ax+by-ab$ de yerlerine yazılırsa zarf

$z=yx+xy-yx \Rightarrow \boxed{z=yx}$ olur.

3) $z=f(x-y)+g(x+y)$ iki keyfi fonk olduğundan ikinci mertebeden kısmi dif. denklem bulunur.

$z_x=f'+g'$ $\quad z_y=-f'+g'$ $\quad z_{xx}=f''+g''$, $z_{yy}=f''+g''$

$z_{xy}=-f''+g''$ olur. $\boxed{z_{xx}=z_{yy}}$ k. dif denk bulunur

4) $zz_x+yz_y+z=0$ denklemin $\alpha(t)=(t^2,1,t^2)$ eğrisinden geçen çözümü: $zz_x+yz_y=-z$ yazılır.

Lagrange yardımcı sist. $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{-z}$ olur.

$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{-z} \Rightarrow dx=-dz \Rightarrow x=-z+c_1 \Rightarrow x+z=c_1$

$u=x+z=c_1$ olur $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{-z} \Rightarrow \ln y=-\ln z+\ln c_2 \Rightarrow \ln y+\ln z=\ln c_2$

$v=yz=c_2$ olur. $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{vmatrix}=z\neq 0$ dır.

$\alpha(t)=(t^2,1,t^2) \Rightarrow x=t^2, y=1, z=t^2$ olur. $\left.\begin{matrix}x+z=c_1\\ yz=c_2\end{matrix}\right\}$ de yerine

yazarsak $\left.\begin{matrix}t^2+t^2=c_1\\ 1.t^2=c_2\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}2t^2=c_1\\ t^2=c_2\end{matrix}\right\}$ $2c_2=c_1 \Rightarrow \boxed{2yz=x+z}$ yüzeyi

bulunur.

5) $\varphi: xp+yq+pq-2 \qquad \psi: 2py+p^2-3$ olsun.

$$\varphi_p\psi_x+\varphi_q\psi_y+(p\varphi_p+q\varphi_q)\psi_z-(\varphi_x+p\varphi_z)\psi_p-(\varphi_y+q\varphi_z)\psi_q=0$$

ifadesi bağdaşabilme şartıdır. Buna göre

$$(x+q)\cdot 0+(y+p)\,2p+(p(x+q)+q(y+p))\cdot 0-(p+p\cdot 0)(2y+2p)$$

$$-(q+q\cdot 0)\,0\stackrel{?}{=}0 \Rightarrow 2yp+2p^2-2py-2p^2\stackrel{?}{=}0 \quad 0=0$$

old. olan bağdaşabilirdir

6) $(xp)^2+\frac{1}{2}y^{-1}q=2$ dak tam çözümü?

$\varphi(x^n p, y^m q)=0$ formundadır $n=1,\ m=-1$

$x_1=\ln x \qquad y_1=y^{1-(-1)}=y^2$ dönüş. uyg.

$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx}=p_1\frac{1}{x} \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dy}=q_1 2y$ olur

Bunlar denklemde yerlerine yazılırsa,

$\left(x\cdot p_1\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{2}y^{-1}q_1 2y=2 \Rightarrow p_1^2+q_1=2$ olur.

$p_1=a$ alınırsa $q_1=2-a^2$ olur. Bu ifadeler

$dz=p_1dx_1+q_1dy_1$ tam dif. denklemde yerlerine yazılırsa

$dz=a\,dx_1+(2-a^2)dy_1 \Rightarrow z=ax_1+(2-a^2)y_1+b$ olur.

$x_1=\ln x \quad y_1=y^2$ alınırsa tam çözüm

$\boxed{z=a\ln x+(2-a^2)y^2+b}$ olur.